# I. Fonction logarithme népérienne :

## a. Activité :

On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f : \left]0,+\infty\right[ \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

1. Est-ce que admet une fonction primitive sur $\left]0,+\infty\right[$ ? ( justifier votre réponse ) .
2. Combien de fonctions primitives $F$ tel que $F(1)=0$ ?

## b. Définition :

La fonction primitive $F$ de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ qui s'annule en 1 $\left(F(1)=0\right)$ s'appelle

La fonction logarithme népérienne et note $F(x)=\ln(x)$ ou $F(x)=\ln x$. Avec

$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

## c. Remarque :

Au lieu d'écrire $F(x)=\ln x$ on écrit $f(x)=\ln x$.

## d. Conséquences :

- $\ln 1 = 0$
- La fonction $f(x)=\ln x$ est définie sur $\left]0,+\infty\right[$ .
- La fonction $f(x)=\ln x$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ ( car $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ ).
- La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$ ( car la fonction logarithme népérienne est dérivable ).
- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ ( car $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}>0$ ).
- En déduit $\forall a,b \in \left]0,+\infty\right[, a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$ et $\forall a,b \in \left]0,+\infty\right[, a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$ .

## e. Exercice :

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{3}{\ln x}$ .
- Résoudre l'équation suivante : $(E) : \ln(2x)-\ln(x-1)=0$.
- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{\ln x}$ .
- Résoudre l'inéquation suivante : $(E') : \ln(2x)-\ln(x-1)<0$.

## f. Signe de $\ln x$ :

Soit : $x \in \left]0,+\infty\right[$ on a trois cas :

- 1$^{er}$ cas : $x=1$ donc : $\ln 1 = 0$ .
- 2$^{ième}$ $x \in \left]1,+\infty\right[$ , donc : $x>1 \Rightarrow \ln x > \ln 1$ ( c.à.d. $x>1 \Rightarrow \ln x > 0$ ( car $\ln 1 = 0$ ) ).
- 3$^{ième}$ cas $x \in \left]0,1\right[$ , donc : $x<1 \Rightarrow \ln x < \ln 1$ ( c.à.d. $x<1 \Rightarrow \ln x < 0$ )
- D'où le signe de $\ln x$ par un tableau

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## II. Propriétés algébriques :

### a. Propriétés :

Pour tous $a>0$ et $b>0$ et $r\in$ on a :

1. $\ln ab=\ln a+\ln b$ ( propriété admise ) .
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$ .
3. $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$ .
4. $\ln a^{r}=r\ln a$ .

### b. Preuve pour la 2ième et la 3ième :

### c. Remarque :

- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\times \ln a$ et $\ln\left(\sqrt[3]{a}\right)=\dfrac{1}{3}\times \ln a$.
- On écrit :
  - $\ln(x)\times\ln(x)=\ln^{2}(x)$ .
  - On général : $n\in\mathbb{N}^{*}$ on a : $\underbrace{\ln(x)\times\ln(x)\times\cdots\times\ln(x)}_{\text{n fois}}=\ln^{n}(x)=\ln^{n}x$

### d. Exemple :

1. On pose $\ln 2=0,7$ et $\ln 3=1,1$ ;calculons : $\ln 4$ et $\ln 8$ et $\ln\sqrt{3}$ et $\ln\sqrt[3]{2}$ et $\ln\sqrt[3]{3^{5}}$ .

## III. Limites :

### a. Propriétés :

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to0^{+}}\ln(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to0^{+}}x\times\ln(x)=0^{-}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{n}}=0$ | $\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{n}\times\ln(x)=0^{-}$ |
| $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ | |

### b. Remarques :

- $\lim\limits_{x\to0^{+}}\ln(x)=-\infty$ . Donc la courbe $(C_f)$ de $f$ admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x=0$ ( l'axe des ordonnées ) .
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ Donc la courbe $(C_f)$ de $f$ admet une branche parabolique ( à déterminer ).
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ .Donc la courbe $(C_f)$ de $f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .

### c. Application :

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}$.
2. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x\times\ln x}$.
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^{3}}$.

## IV. Fonction de la forme : $f(x)=\ln(u(x))$

**a. Remarque :**

On pose : $g(x)=\ln x$ et la fonction $u(x)$ donc : $g\circ u(x)=g(u(x))=\ln(u(x))$.

Conclusion : la fonction $f(x)=\ln(u(x))$ est la composée de deux fonctions .

- Domaine de définition de $f$ est de la manière suivante : $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in D_u \text{ et } u(x)>0)$.
- Si de plus la fonction $u(x)$ est dérivable on a : $[\ln(u(x))]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- De même on a : $[\ln(|u(x)|)]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

**b. Démonstration :**

**c. Exemple :**

Calculons $f'$ avec $f(x)=\ln|x^2-x|$ .

**d. Vocabulaire et remarque :**

- Soit $f$ fonction dérivable sur $I$ et $\forall x\in I$ : $u(x)\neq 0$.

  La fonction $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction $u$ sur $I$ .

- Puis que $[\ln(|u(x)|)]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc les fonctions primitives de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur $I$

  sont les fonctions de la forme $F(x)=\ln|u(x)|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$ .

**e. Exemple :**

- Trouver les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sur $]2,+\infty[$ .

## V. Etude de la fonction $f(x)=\ln x$ :

- Domaine de définition :
- Continuité :
- Limites :
- Sens de variation de $f$ .
- La courbe représentative de $f$ :

  - **Remarque :**
- La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ .
- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Donc : $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ donc l'équation $x\in]0,+\infty[$ ; $f(x)=1$ admet une solution et une seule on note ce nombre unique par $e\simeq 2,718$ ( valeur approché ) qui est un nombre irrationnel .
- **Conclusion :** $\ln e=1$ et $\ln\dfrac{1}{e}=-1$ et $\ln e^r=r$ ; $(r\in\mathbb{Q})$ .
- **Application :** on détermine l'ensemble de définition de $f(x)=\dfrac{1}{3-\ln(x)}$ .

## VI. Fonction logarithme de base $a$ et propriétés :

### A. Fonction logarithme de base $a$ :

#### a. Définition :

Soit $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ ( c.à.d. a strictement positif et différent de 1 ) .

La fonction définie par :

$$f \ : \ ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

S'appelle la fonction logarithme de base $a$, on note cette fonction par $f = \log_a$ d'où : $f(x) = \log_a(x)$ .

#### b. Conséquences :

- $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $\log_a(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$.
- $\log_a(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$ et $\log_a(e) = \dfrac{\ln(e)}{\ln(a)} = \dfrac{1}{\ln(a)}$ .

#### c. Cas particuliers :

- Cas $a = e$ : $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$ donc logarithme de base $a = e$ est le logarithme népérienne .
- Cas $a = 10$ : on obtient la fonction $f(x) = \log_{10}(x)$ s'appelle la fonction logarithme décimale on note $\log_{10} = \mathrm{Log}$ d'où : $f(x) = \log_{10}(x) = \mathrm{Log}(x)$ .
- $\mathrm{Log}(10^r) = r$ ; $\mathrm{Log}(10) = 1$ ; $\mathrm{Log}(1) = 0$.

### B. Propriétés logarithme de base $a$ :

#### a. Propriétés :

Soit $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ et pour tout $x$ et $y$ de $]0,+\infty[$ on a :

- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ .
- $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ .
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ .
- $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$ avec $r \in \mathbb{Q}$.
- $\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2} \times \log_a(x)$ et $\log_a\left(\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{1}{3} \times \log_a(x)$ .

#### b. Démonstration :

### C. Etude de la fonction : $f(x) = \log_a(x)$ :avec $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

- Domaine de définition de $f$ :
- Continuité de $f$ :
- Limites aux bornes de $D_f$ :
- Sens de variations de $f$ :
- Courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $a = 2$ et $a = \dfrac{1}{2}$.

c. **Exercices :**

1. **On simplifie :**

$$\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)$$

$$\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_3\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$$

4. **Montrer que :** $\forall a,b \in ]1,+\infty[\ ;\ \log_b(a)=\dfrac{1}{\log_a(b)}$

5. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ :** l'équation suivante $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$ .

6. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante** $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$ .

7. **Etudier la fonction suivante :** $f(x)=\log_5(x+1)$